الملخص النظري

الرياضيات 3

شرط كون منحني أملس (معطى بالاحداثيات الوسطية) :

1) أن تكون المشتقات الجزئية للمنحني المعطى موجودة أي غير معدومة

2) أن يكون المنحني معرف ومستمر

3) عندما يكون الوسيط مختلف أي (عند إعطاء قيمتين للوسيط $t_1 + t_2$ يجب عند التعويض بمعادلات المنحني الأجوبة مختلفة أي

ليكن $\vec{r}$ منحني صقيل $\Leftrightarrow$ $t_1 \neq t_2 \Longrightarrow$

$$r(t_1) \neq r(t_2)$$

اذا كان المنحني معطى ديكارتيا (بدلالة x,y,z) :

الشرط اللازم والكافي ليكون المنحني أملس هو

$$J \neq 0 \Longrightarrow \quad J = \begin{vmatrix} \frac{dF_1}{d_x} & \frac{dF_2}{d_x} \\ \frac{dF_1}{d_y} & \frac{dF_2}{d_y} \end{vmatrix} \neq 0$$

حيث أن معادلة منحى تعطى ديكارتيا من الشكل

$$\square = \begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

معادلات المستقيم المماس للمنحني:

بفرض لدينا النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ بشرط أن تكون هذه النقطة غير شاذة :

$$\frac{x - x_0}{x_p{}'} = \frac{y - y_0}{y_p{}'} = \frac{z - z_0}{z_p{}'}$$

معادلة المستوي الناظم للمنحني:

بفرض لدينا النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ بشرط أن تكون هذه النقطة غير شاذة :

$$x_p{}'(x - x_0) + y_p{}'(y - y_0) + z_p{}'(z - z_0) = 0$$

ملاحظة مهمة جدا :

عند التاكد فيما اا كان المنحني صقيلا أم لا يجب أن نتاكد بأن المشتقات جميعها لا تنعدم عند نقطة واحدة وإذا انعدمت نتأكد من انتماء النقطة التي انعدمت عندها المشتقات الجزئية الى معادلة المنحني المعطى واذا كانت معادلة المنحني من الشكل على سبيل المثال:

$$ax^n + bxy + ky^2 = 0$$

أي يجب أن تكون هنالك معادلة عندما نتحقق اذا كانت تلك النقطة له أم لا أما اذا كان معطى وسيطيا فإننا بالمشتقات تخرج قيمة الوسيط ونعوض في كل احداثي من إحداثيات المنحني واذا كان الوسيط نفسه فإن المنحني سوف يعتبر صقيل ما عدا تلك النقطة .

معادلة المستقيم الناظم على السطح:

بفرض لدينا النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ بشرط أن تكون هذه النقطة غير شاذة :

$$\frac{x - x_0}{x_p{}'} = \frac{y - y_0}{y_p{}'} = \frac{z - z_0}{z_p{}'}$$

معادلات المستوي المماس للسطح:

بفرض لدينا النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ بشرط أن تكون هذه النقطة غير شاذة :

$$x_p'(x - x_0) + y_p'(y - y_0) + z_p'(z - z_0) = 0$$

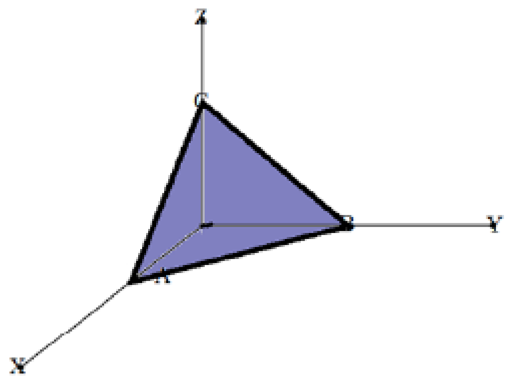
ملاحظة: يتم ذكر المطلوب في نص المسألة أي :

اذا أرادو معادلات المستقيم الناظم ومعادلة المستوي المماس او العكس اذا أرادو معادلات المستقيم المماس ومعادلة المستوي الناظم .

تعطى معادلة المستوي الذي يمر من مبدأ الإحداثيات ويقطع المحاور الثلاثة بالعلاقة:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

حيث أن كل من A,B,C هي عبارة عن نقاط تقاطع هذا المستوي مع كل محور وهو بالشكل التالي :



التكاملات الثنائية :

شرط حساب التكاملات ان تكون المنطقة التي نكامل عليها بسيطة (أي تدخل من منحني واحد وتخرج من منحني واحد)

قانونه: $I = \iint_D f(x, y)dxdy$

ويجب معرفة حدود التكامل أي يجب معرفة ما هو الاحداثي الي سوف نثبته وما هو الذي سوف يتغير ضمن مجال معين ومن المعروف عند إعطاء منطقة D تمكننا من عرفة ذلك فإذا كان لدينا احدى الاحداثي x او y ولنفرض أنه y معطى بمعادلتين ثابتة أي $a \le y \le b$ حيث a,b ثوابت و x معطى بدلالة تابع لـy نستنتج من ذلك بأن الـy هو الذي سوف نثبته و الـx هو الذي سوف يتغير

$$I = \int_a^b [\int_{x=F_1(y)}^{x=F_2(y)} f(x,y)dx]dy$$

اما إذا تم إعطاء x و y بدلالة التابعين فإنه لدينا حرية الاختيار بينهما من الذي سوف نضع في التكامل أولا ونقرر ذلك استنادا الى الأسهل في حل التابع .

ملاحظات :

1) في الاحداثيات الديكارتية التابعة ل (x,y) يفضل أن يتم رسم الرسمة بجانبها وذلك لمعرفة ما اذا كانت المنطقة بسيطة (يوجد منحني دخول واحد ومنحني خروج واحد) أم لا كي لا تقع في الخطأ .

2) عندما تكون المنطقة غير بسيطة (يوجد أكثر من منحني دخول أو منحني خروج) بحسب تقسيم المنطقة بحيث تصبح منطقة بسيطة كما في الشكل

نلاحظ أنه إذا الx نجد أن المل من مستقيم ويخرج من مستقيمين

اذا المنحني غير صقيل لذلك نقوم بانزال عمود رأس المثلث العليا على المحور ox ونحسب كلف قسم لوحده ومن ثم نجمع نتيجة التكاملين .

3) ان معادلة الدائرة تعطى اما بهذا الشكل

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

أو $y = \sqrt{ax + x^2}$

وهنا نقوم بتربيع الطرفين ونصلح العلاقة لتصبح كالعلاقة الأولى :

يمكن إيجاد حدود التكامل عن طريق الحل المشترك لجملة معادلات منقطة التكامل.

4) ان يكون التابع F(x,y) المكامل عليه معرف ومستمر في منطقة التكامل والا أصبح لدينا ما يعرف بالتكامل الشاذ لذلك وجب التأكد من مجموعة تعريف التابع F(x,y)

التكامل وسيطيا

قانونه $I = \iint (u,v).|J|.du.dv$

حيث أن u,v وسيطان

J وهو المحدد اليعقوبي الذي يعطى بالقانون : $J = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix}$

نستخدم التكامل الوسوطي في حالتين :

1) اذا كانت منطقة التكامل المعطاة كل حدين منها تمثل التابع بعد

مثال اذا كانت D على سبيل المثال $ax + by = c$

$ax + by = D$

نلاحظ هنا ان الطرف الايسر $x - ky = e$

وكل أول تابعين يمثلان دالة واحدة $x - ky = f$

وكذلك ثاني تابعين يمثلان دالة وحيدة

عندها نفرض أن $ax + by = u$

$x - ky = v$

ويجب التأكيد على أنه يمكن أن تختلف منطقة التكامل وأن D المعطاة

وعندها يجب ان نحسب ygx بدلالة فقط و ذلك من اجل تعويض كل ygx بما يناسبها في التكامل المعطى

الحالة الثانية :

اذا كانت التابع المكامل صعب المكاملة مثل

$$f(x,y) = e^{g(x,y)}$$

$$f(x,y) = m(g(x,y))$$

$$\{f(x,y) = \cos(g(x,y))$$

$$f(x,y) = \sin(g(x,y))$$

وفي هاتين الحالتين اذا كانت g(x,y) كسري نلجأ الى هذه الطريقة

التكامل قطبيا :

تذكرة $y = r\sin\theta, x = r\cos\theta$

حيث ان r نصف قطر الدائرة المرسومة قانونه :

$$I = \iint f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

لايجاد حدود التكامل :

1-لتبدأ ب r لدينا حالتين :

اذ كانت الدائرة مركزية فان $0 < r < a$ و نعني بان المركزية بان مركز الدائرة منطبق على محور الاحداثيات

اذا كانت غير مركزية فاننا يجب ان نخرج حدودها من منطقة التكامل و يمكن ان تكون تابعة للزاوية θ ويمكن ان تكون ثابتة

2-اما بالنسبة ل θ ففي اغلب الاحيان عند رسم الشكل يستوضح لدينا و لدينا عدة حالات مهمة منها :

1-عندما $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ حسب الشكل نلاحظ بان الزاوية اللازمة علىθ ان تمسها لكي تحد المنطقة المطلوبة بالكامل هي من 0 الى $\frac{\pi}{2}$

2-عندما $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$0 < r < 2a\cos\theta$$

3-$0 < \theta < \pi$

$$0 < r < 2a\sin\theta$$

4 – منحى الكارديوئيد : معادلته $r = a(1+\cos\theta)$

$$0 < \theta < \pi$$

$$0 < r < a(1+\cos\theta)$$

التكاملات الشاذة :

لدينا عدة حالات للتكاملات الشاذة وهي كما ذكرنا سابقا عندما يكون هنالك حالة انقطاع في التكامل المعطى على منطقة التكامل و يمكن ان يكون هذا الانقطاع اما على نقطة او اكثر او على مستقيم و يتحدد ذلك بالرسم و بايجاد مجموعة تعريف التابع المكامل و عندها نحيط هذه المنطقة بنطاق صغير جدا $\partial n \to 0$ و نبدل في حدود التكامل هذه النطقة الشاذة بـ∂n و عند حساب التكامل نضع اشارة النهاية قبل اشارة التكامل أي يصبح الشكل

$$I = \lim_{\delta n \to 0} \int \left[\iint_{\delta n} f(x,y)dx \right] dy$$

وعند حساب التكامل و التعويض بحدود التكامل نعوض ∂n كما هي و عندها نحسب النهاية المطلوبة

اما الحالة الثانية التي لدينا هي ان تكون منطقة التكامل المكامل عليها مفتوحة و على سبيل المثال ايجاد

مساحة المنطقة الموجودة خارج دائرة معادلتها معطاة هنا تجد ان نصف القطر r يبدا من الصفر

وينتهي في اللانهاية عندها نعوض يكون التكامل على الشكل التالي

$$I = \lim_{\partial n \to \infty} \int_{f(\theta)}^{f(\theta)} \left[\int_{0}^{\delta n} r\, f(r,\theta)dr \right] d\theta$$

ملاحظة : عند الانتهاء من حل التكامل في التكاملات الشاذة يكون لدينا احتمالين الاول ان يكون جواب

التكامل عدد و عندها يتوجب ذكر ان هذا التكامل متقارب والاحتمال الاخر ان بكون ناتج التكامل(∞)

عندها يجب ايضاح ان التكامل متباعد

السطوح من الدرجة التانية :

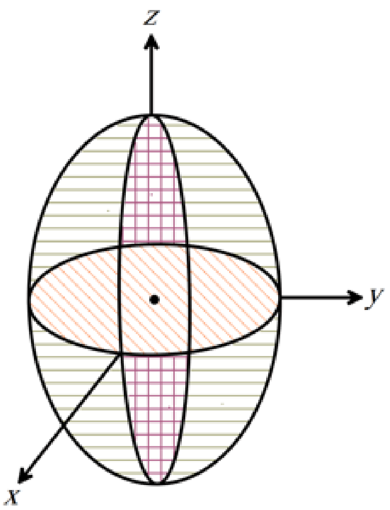
معادلاتها :

1-مجسم قطع ناقص دوراني :

محوره oz : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+z$

محوره oy : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}+y$

محوره ox: $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+x$

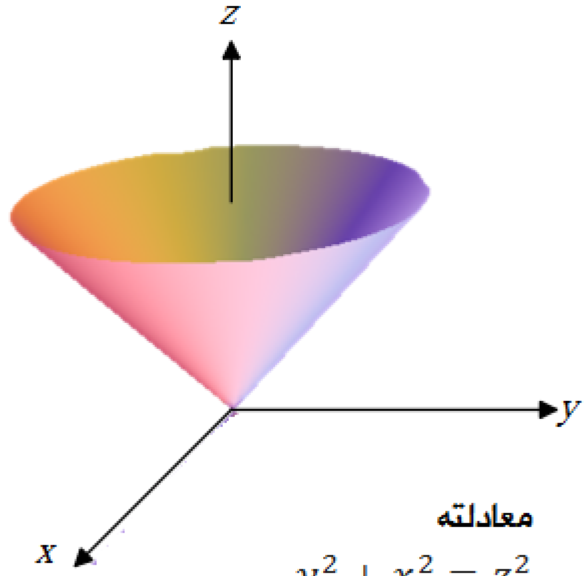


مجسم قطع ناقص دوراني

حيث ان فوهته عبارة عن قطع ناقص دوراني

- المخروط $x^2 + y^2 = tg^2(\alpha)z^2$

مخروط قائم محوره OZ

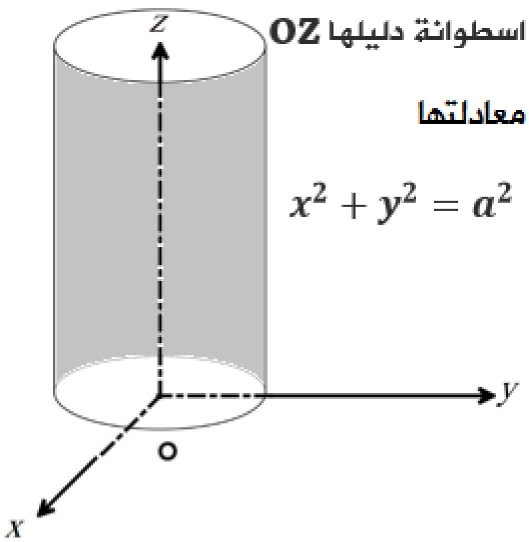


معادلته

$$y^2 + x^2 = z^2$$

4- الاسطوانة $x^2 + y^2 = a^2$

اسطوانة دليلها OZ

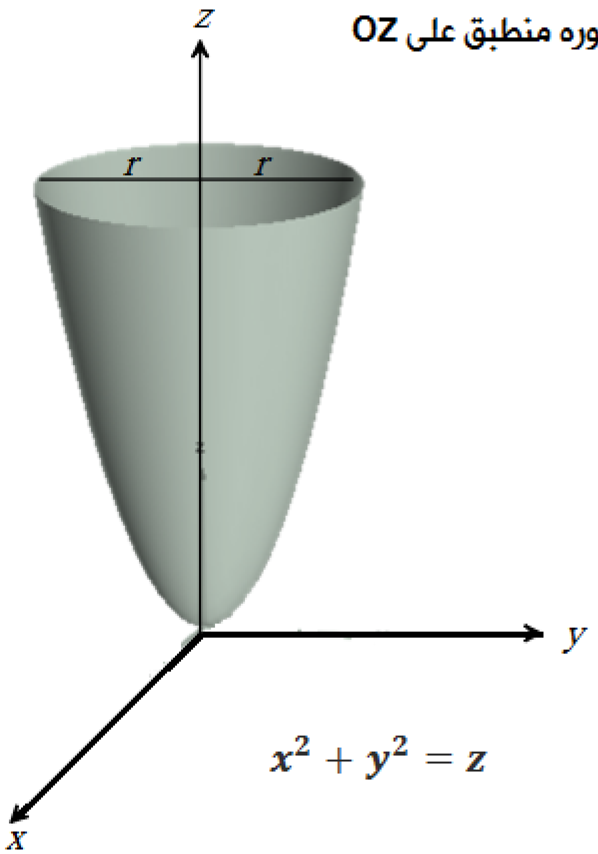


معادلتها

$$x^2 + y^2 = a^2$$

-5 مجسم قطع ناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=r^2$

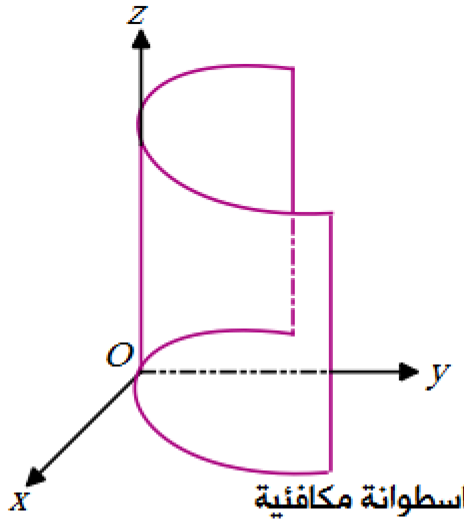
محوره منطبق على OZ



$x^2+y^2=z$

وإذا كانت $a+b=c$ تصبح المعادلة معادلة كرة

الاسطوانة المكافئة $y^2 = x$ أو $z^2 = x$



اسطوانة مكافئة

معادلته: $y^2 = x$

التكاملات الثلاثية

ديكارتياً: يتم حسابها تماما كما في التكاملات الثنائية مع إضافة متحول جديد وهو ال z فيكون شكل التكامل:

$$I = \iiint f(x, y, z) dx\, dy\, dz$$

طريقة حساب التكامل:

نقوم باختيار أي احداثي (x, y, z) ونغيره بين سطحين ونثبت الاحداثيين الباقيين أي على سبيل المثال نغير ال z بين أخفض مستوي يحصر الحجم المطلوب وبين أعلى مستوي يحصر الحجم المطلوب ونحسب التكامل بالنسبة ل z فقط وبعدها نسقط الشكل على المستوي xoy ونوجد شكله على هذا المستوي ونكمل الحل تماما كما في التكاملات الثنائية.

الاحداثيات الاسطوانية:

معادلاتها: $x = r.\cos(\theta)$

$$y = r.\sin(\theta)$$

$$z = z$$

يتم استخدام الاحداثيات الاسطوانية إذا كان الشكل متناظر بالنسبة لأحد المحاور الاحداثية.

الاحداثيات الكروية:

معادلاتها: $x = r.sin(\theta)\ cos(\varphi)$

$$y = r.\sin(\theta)\ \ sin(\varphi)$$

$$z = r.cos(\theta)$$

$$\boldsymbol{I = \iiint sin\,(\theta) r^2 f(r,\theta,\varphi)\, d(r) d(\theta) d(\varphi)}$$

ويتم التكامل مباشرة دون التحول إلى التكامل الثنائي.

حالات هامة:

حالة الكرة الغير مركزية ومعادلتها: $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq r \leq \cos\theta$$

الكرة غير مركزية ومعادلتها: $x^2 + y^2 + z^2 \leq y$

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

أما r فيتم إيجادها عن طريق v خلال منطقة التكامل.

*** أما إذا كانت مركزية فإن التكامل يكون من الشكل:**

$$I = \int_0^{2\pi} d(\varphi) \int_0^{\pi} \sin(\theta)\, d(\theta) \int_0^{r} f(r,\theta,\varphi) r^2 d(r)$$

3 2 1

ويتم المكاملة بالأول حسب الترقيم.

التكامل السطحي

يمكن التحويل من تكامل سطحي إلى تكامل ثنائي وذلك بإجراء التبديل: $\mu\, dx\, dy \longrightarrow ds$

$$\mu = \sqrt{\dot{z}_x^2 + \dot{z}_y^2 + 1}$$

$$ds = \sqrt{\dot{z}_x^2 + \dot{z}_y^2 + 1}\, dx\, dy$$

وبمجرد حساب μيتحول التكامل إلى تكامل ثنائي عادي يتم حله إما ديكارتيا أو وسيطيا أو قطبيا

ملاحظة:

يفضل رسم منطقة التكامل المعطاة وذلك من أجل معرفة مسقط الشكل على المستوي xoy

التكامل على منحني

إذا كان لدينا منحني فراغي أملس (صقيل) معطى بالإحداثيات الوسيطية

$$r_t = x_t\,\vec{i} + y_t\,\vec{j} + z_t\,\vec{k}$$

فإن التكامل الخطي يعطى بالعلاقة $I = \int f(x, y, z) dl$

حيث dl العامل انحناء $dl = \sqrt{\dot{x}_t^2 + \dot{y}_t^2 + \dot{z}_t^2}\, dt$

قانون والس

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\ dx \quad \text{أو} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\ dx$$

أذا كان m زوجي في كلا الحالتين يكون ناتج التكامل على الشكل التالي $I = \frac{\pi}{2}\,\frac{(m-1)!!}{m!!}$

وإذا كان m فردي يكون ناتج التكامل $I = \frac{(m-1)!!}{m!!}$ حيث إن $m!!$ تكتب على الشكل

إذا كان m فردي $m!! = m\,(m-2)(m-4)\,\dots\dots{*}\,1$

إذا كان m زوجي $m!! = m\,(m-1)(m-4)\,\dots\dots.*\,2$

$$10!! = 10*8*6*4*2$$

$$9!! = 9*7*5*3*1$$

إذا كان لدينا حدود التكامل ليست كما في قانون والس والتي هي $\frac{\pi}{2} \to 0$ فإننا نجري قانون والس ومن ثم نضرب التكامل بعدد إذا ماضرب ب $\frac{\pi}{2}$ ينتج الحد المطلوب

$$I = \int_0^{2\pi} \sin^3 x\, dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\ dx = 4\ \frac{(3-1)!!}{3!!} = 4.\frac{2}{3}$$

لقد ضربنا ب 4 لأننا إذا ضربنا حدود التكامل بلعدد 4 سوف تنتج حدود التكامل المطلوبة $4.\frac{\pi}{2} = 2\pi$

تذكرة بقوانين المثلثات المستخدمة بلتكامل

$$\sin(2x) = 2\ \sin x\,.\cos x$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos\frac{x}{2}}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos\frac{x}{2}}{2}$$

تغيير المتحول:

تستخدم هذه الطريقة في حل المعادلات عندما تكون لدينا منطقة التكامل D معقدة (من الصعب المكاملة عليها) وغالبا ما تكون محددة بأربع معادلات كل معادلتين تكتب على شكل تابع ما

أو عندما يكون لدينا المنحني المكامل صعب أو مستحيل المكاملة

عندئذ نستبدل كلا من **x&y** ب **U(x,y)&v(x,y)** و كل **dxdy** ب**JdUdv**

حيث $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = J$ و يسمى **J** بالمحدد اليعقوبي (جاكوبيان) لاحظ أن المحدد أعطي بالصيغة $\frac{\partial x}{\partial u}$......... وليس بالمقلوب أي أنه عندما تعطى المتحولات الجديدة (أو تستنتج) **U(x,y)&v(x.y)**

فإننا نتبع إحدى الطريقتين :

نقوم بكتابة المتحولات بالشكل **x(U,v)&y(U.v)** ثم نشتق بالنسبة ل **U&v** ثم نعوض بالمحدد فينتج المحدد اليعقوبي

نبقي على الصيغة **v(x.y)&U(x,y)** و نشتق بالنسبة ل **x&y** مع الانتباه لما يلي: $J = \frac{\partial(x.y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}$

أي نشتق **U&v** بالنسبةلx&y ثم نحسب المحدد كما في السابق مع الانتباه بوضع قيمة مقلوب هذا المحدد في التكامل

مثال:احسب التكامل الآتي باستعمال الطريقتين السابقتين

$$I = \iint_D (x-2y)^2(4x+6y)^3\,dx\,dy$$

حيث D هي المنطقة المحددة بالمنحنيات :

$$4x+6y=5 \quad 4x+6y=10 \quad x-2y=3 \quad x-2y=9$$

الحل: لنجر التغيير $v = x - 2y \qquad u = 4x + 6y \qquad (2)$

الطريقة الأولى :من (2) نجد أن $y = \frac{u-4v}{14} \qquad x = \frac{u-3v}{1}$

بالتعويض في الجاكوبيان نجد أن: $\frac{1}{14} = \left|\frac{-1}{14}\right| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ \frac{1}{14} & \frac{-4}{14} \end{vmatrix} = J$

$$I = \frac{1}{3}\iint_D v^2u^3dudv =$$

$$= \frac{1}{14}\int_3^9 v^2dv \int_5^{10} u^3du = \frac{1}{14}\left[\frac{v^3}{3}\right]_3^9 \left[\frac{u^4}{4}\right]_5^{10}$$

$$= \frac{1}{14}(243-9)(2500-156.25) = \frac{1}{14}225 * 2343.75 = 37667.4$$

الطريقة الثانية:من جملة المعادلات في (2) و التعويض في القانون أعلاه نجد أن

$$J_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = |-14| = 14$$

$$J = \frac{1}{J_1} = \frac{1}{14}$$

و نعوض كالسابق

التحليل الشعاعي:

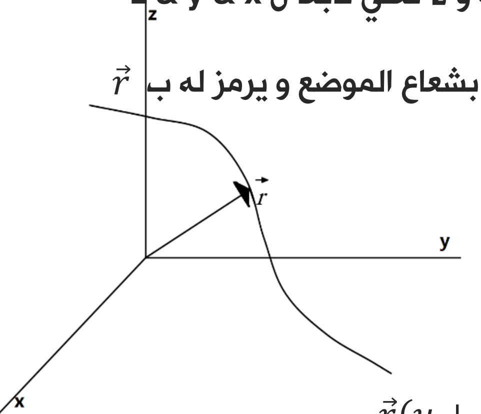
إن التوابع تقسم إلى قسمين:

توابع عددية: هي توابع تعطي قيمة عددية إذا ما أدخلنا قيمة لمتحولاتها مثال: $f(x,y,z) = 3x + 5y + 9z$

توابع شعاعية: هي توابع تعطي قيمة شعاعية إذا ما أدخلنا قيمة

لمتحولاتها أي تكتب بالشكل: $\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}$

ملاحظة : إن المركبات F_x & F_y & F_z تمثل مساقط الشعاع $\vec{f}$ على المحاور الإحداثية و لا تعني تابعا ل x & y & z



حالة خاصة:إذا كان $F_x = x$ & $F_y = y$ & $F_z = z$ فعندئذ يسمى الشعاع $\vec{f}$ بشعاع الموضع و يرمز له ب $\vec{r}$

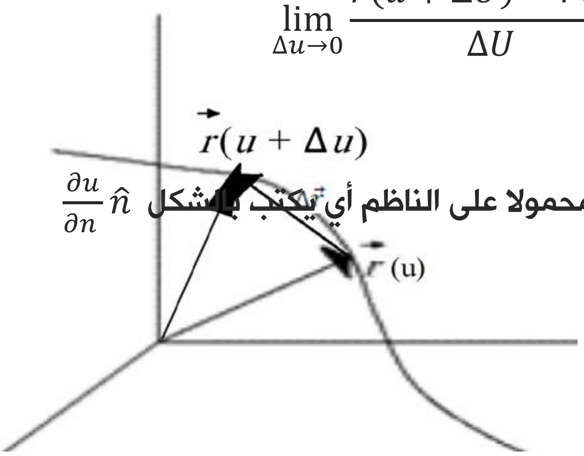
أي $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$

الاشتقاق الاتجاهي :

يؤخذ الاشتقاق الاتجاهي من النهاية:

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{r}(u+\Delta U) - \vec{r}(u)}{\Delta U} = \lim_{\Delta U \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta U} = \frac{dr}{\partial U} = \frac{dx}{\partial U}\hat{\imath} + \frac{dy}{\partial U}\hat{\jmath} + \frac{dz}{\partial U}\hat{k}$$

نسمي هذه النهاية بتفاضل $\vec{r}$



التدرج: إن الاشتقاق الاتجاهي يأخذ مناحي مختلفة و يكون أعظميا إذا كان محمولا على الناظم أي يكتب بالشكل $\frac{\partial u}{\partial n}\hat{n}$

∇ مؤشرهاملتونهو تابع يشتق ويوجه بآن واحد ويكتب بالشكل :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

ونتعامل معه كما نتعامل مع أي شعاع

و تأثيره على التابع العددي يعطى بالشكل: $\overrightarrow{gradu} = \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$

أي أن $\vec{\nabla}u = \frac{\partial U}{\partial n}\hat{n}$ و هو محمول على الناظم

مثال : احسب التدرج للتابع العددي $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

الحل: $\vec{\nabla}r^2 = \frac{\partial r^2}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial r^2}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial r^2}{\partial z}\hat{k}$

$$= \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}\hat{\imath} + \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}\hat{\jmath} + \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}\hat{k}$$

لكن $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|r|} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\hat{\imath} + \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\hat{\jmath} + \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\hat{k}$

نعوض : $\vec{\nabla}r^2 = 2r\hat{r}$

نلاحظ أنه عند الاشتقاق لأي تابع عددي و تحويله إلى تابع شعاعي لا بد من إضافة شعاع الواحدة الذي يعطي مشتق التابع العددي جهة

سؤال امتحان :استنتج علاقة تدرج للتفاضل التام :

ج:العلاقة المطلوب استنتاج علاقة تدرج

لها: $\partial U = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$

كما نعلم مسبقا $\vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$ و $d\vec{r} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}$

بأخذ جداء هذين الشعاعين الداخلي :

$d\vec{r}.\vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = du$ و هو المطلوب

و فيما يلي بعض القوانين الواجب حفظها غيبا :

$$\vec{r} = r.\hat{r}$$

$$r = \vec{r}.\hat{r}$$

$$\vec{\nabla}.r = \hat{r}$$

$$\hat{r} \wedge \vec{r} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cap \hat{r} = 0$$

$$\vec{\nabla}.\vec{r} = 3$$

تأثير ∇ على تابع شعاعي :

التفرق : يحسب من العلاقة: $\overrightarrow{div}F = \vec{\nabla}.\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

مثال : أوجد تفرق التابع $\vec{F} = x^2yz\hat{\imath} - xy^2z\hat{\jmath} + xy\hat{k}$

الحل : $\vec{\nabla}.\vec{F} = 2xyz - 2xyz = 0$ أي أن التابع $\vec{F}$ هو شعاع لولبي

الدوران : نعرف الدوران بأنه الجداء الشعاعي: $\overrightarrow{rot}F = \vec{\nabla}\wedge\vec{F}$ أي

$$\overrightarrow{rot}\mathrm{F} = \vec{\nabla}\wedge\vec{\mathrm{F}} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

مثال أوجد دوران شعاع الموضع

الحل : $\vec{\nabla}\cap\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$ أي أن شعاع الموضع تابع كموني(محافظ)

ملاحظة: إن إي تابع كموني يكتب بالشكل : $\vec{F} = \vec{\nabla}.U$

خواص الدوران :

$$\vec{\nabla}.(U.\vec{F}) = (\vec{\nabla}.U).\vec{F} + U(\vec{\nabla}.\vec{F})$$

$$\vec{\nabla}\cap(U.\vec{F}) = (\vec{\nabla}.U)\cap\vec{F} + U(\vec{\nabla}\cap\vec{F})$$

$$\vec{\nabla}.(\vec{F_1}\cap\vec{F_2}) = (\vec{\nabla}\cap\vec{F_1}).\vec{F_2} - (\vec{\nabla}\cap\vec{F_2}).\vec{F_1}$$

المشتقات الشعاعية من المرتبة الثانية:

المؤشر اللابلاسي: $\overrightarrow{\nabla^2}$

يؤخذ من العلاقة :

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}U) = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}.\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}U) = \frac{\partial^2 F_x}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial^2 z}$$

مثال: $\nabla^2 U = 2 - 2 + 0 = 0$ $\quad U = x^2 - y^2 + xyz$

ومنه الخاصة التالية: $\nabla^2 U = 0$ إذا U تابع توافقي

تفرق الدوران : $\overrightarrow{div}(\overrightarrow{rot}F)$

يؤخذ من العلاقة التالية: $\overrightarrow{div}(\overrightarrow{rot}F) = \vec{\nabla} \cap (\vec{\nabla} U)$

ملاحظة : إذا كان الشعاع $\vec{F}$ كموني فإن تفرق الدوران الخاص به مساو للصفر

وإن تفرق دوران أي تابع عددي يكون صفرا حسب خاصة المحددات السابقة

المشتقات الشعاعية للإحداثيات المنحنية $U(u, v, w)$:

حيث $\quad w(x, y, z) \qquad v(x, y, z) \qquad u(x, y, z)$

إن الاحداثيات المنحنية هي جملة إحداثيات غير ثابتة أي تتحرك مع النقطة المادية **M** فإذا رمزنا لأشعة الواحدة ب

$$\hat{w} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right|} \qquad \hat{v} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|} \qquad \hat{u} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|}$$

حيث $\vec{r}(x, y, z) = \vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} = \vec{r}(u, v, w)$

نعلم أن $\overrightarrow{dr} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} dw$

وأن $\quad (1) \qquad dU = \frac{\partial U}{\partial u} du + \frac{\partial U}{\partial v} dv + \frac{\partial U}{\partial w} dw$

بالتالي حسب العلاقة السابقة لأشعة الواحدة :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right| \hat{w} \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| \hat{v} \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right| \hat{u}$$

بفرض أن :

$$h_w = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right| \qquad h_v = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| \qquad h_u = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|$$

حيث إن $|\vec{a}|$ تمثل طويلة هذا الشعاع

أي أن $\quad (2) \qquad \overrightarrow{dr} = h_u du\hat{u} + h_v dv\hat{v} + h_w dw\hat{w}$

و الآن لنكتب علاقة التدرج بالشكل الآتي:

$$\vec{\nabla}.U = \lambda_u \hat{u} + \lambda_v \hat{v} + \lambda_w \widehat{w} \qquad (3)$$

الآن لنحسب المجاهيل $\lambda_u \& \lambda_v \& \lambda_w$ وذلك بتعويض علاقة التفرق للتدرج التام المستنتجة سابقا في كل من العلاقات (1),(2),(3) أي

$$d\vec{r}.\vec{\nabla}U = dU$$

$$h_u du \lambda_u + h_v dv \lambda_v + h_w dw \lambda_w = \frac{\partial U}{\partial u} du + \frac{\partial U}{\partial v} dv + \frac{\partial U}{\partial w} dw$$

بالتالي :

$$h_u \lambda_u = \frac{\partial U}{\partial u} \qquad h_v \lambda_v = \frac{\partial U}{\partial v} \qquad h_w \lambda_w = \frac{\partial U}{\partial w}$$

أي :

$$\lambda_u = \frac{1}{h_u}.\frac{\partial U}{\partial u} \qquad \lambda_v = \frac{1}{h_v}.\frac{\partial U}{\partial v} \qquad \lambda_w = \frac{1}{h_w}.\frac{\partial U}{\partial w} \qquad (4)$$

نعوض (4) في (3) لنجد :

$$\vec{\nabla}.U = \frac{1}{h_u}.\frac{\partial U}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}.\frac{\partial U}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}.\frac{\partial U}{\partial w}\widehat{w}$$

مثال: استنتج التفرق ديكارتيا و كرويا و اسطوانيا :

ديكارتيا : $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$

نعوض في العلاقة السابقة في التفرق مع الانتباه أن

$$h_{u=x} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right| = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}\right| = 1 \qquad h_{v=y} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right| = 1$$

$$h_{w=z} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right| = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right| = 1$$

فينتج لدينا: $\vec{\nabla}.U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$

اسطوانيا : $\vec{r}(r,\theta,z) = r\cos\theta\,\hat{\imath} + r\sin\theta\,\hat{\jmath} + z\hat{k}$

نعوض في العلاقة السابقة مع الانتباه أن :

$$h_{u=r} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right| = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right| = \left|\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

مع الانتباه أن شعاع الواحدة يساوي الشعاع على طوياته

$$h_{v=\theta}=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right|=\left|-r\sin\theta\,\hat{\imath}++r\cos\theta\,\hat{\theta}\right|=r$$

$$h_{w=z}=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\right|=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right|=1$$

فينتج لدينا: $\vec{\nabla}.U=\frac{\partial U}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$

كرويا: $\vec{r}(r,\theta,z)=r\sin\theta\cos\varphi\,\hat{r}+r\sin\theta\sin\varphi\,\hat{\theta}+r\cos\theta\,\hat{\varphi}$

نعوض في العلاقة السابقة مع الانتباه أن:

$$h_{u=r}=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right|=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right|=\left|\sin\theta\cos\varphi\,\hat{r}+\sin\theta\sin\varphi\,\hat{\theta}+\cos\theta\,\hat{\varphi}\right|=$$

$$\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\theta}=$$

$$\sqrt{\sin^2\theta\,(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+\cos^2\theta}=\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=1$$

$$h_{v=\theta}=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right|=\left|r\cos\theta\cos\varphi\,\hat{r}+r\cos\theta\sin\varphi\,\hat{\theta}-r\sin\theta\,\hat{\varphi}\right|$$

$$=\sqrt{r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi+r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi+r^2\sin^2\theta}$$

$$\sqrt{r^2\cos^2\theta\,(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+r^2\sin^2\theta}=\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=r$$

$$h_{w=\varphi}=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\right|=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right|=\left|-r\sin\theta\sin\varphi\,\hat{r}+r\sin\theta\cos\varphi\,\hat{\theta}\right|=$$

$$\sqrt{r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}=\sqrt{r^2\sin^2\theta\,(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}=$$

$$r\sin\theta$$

أي: $h_{u=r}=1 \qquad h_{v=\theta}=r \qquad h_{w=\varphi}=r\sin\theta$

فينتخ لدينا: $\vec{\nabla}.U=\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{\partial U}{\partial\varphi}\hat{\varphi}$

بالتالي (5) $\vec{\nabla}=\frac{1}{h_u}.\frac{\partial}{\partial u}\hat{u}+\frac{1}{h_v}.\frac{\partial}{\partial v}\hat{v}+\frac{1}{h_w}.\frac{\partial}{\partial w}\hat{w}$

الآن لنستنتج التفرق و الدوران و اللابلاسيان للتوابع المنحنية :

التفرق : لنكتب قانون التفرق بالشكل :

$$\vec{\nabla}.\vec{F}=\left(\frac{1}{h_u}.\frac{\partial}{\partial u}\hat{u}+\frac{1}{h_v}.\frac{\partial}{\partial v}\hat{v}+\frac{1}{h_w}.\frac{\partial}{\partial w}\widehat{w}\right).(F_u\hat{u}+F_v\hat{v}+F_w\widehat{w})=$$

$$\left(\frac{1}{h_u}.\frac{\partial}{\partial u}F_u+\frac{1}{h_v}.\frac{\partial}{\partial v}F_v+\frac{1}{h_w}.\frac{\partial}{\partial w}F_w\right)$$

بإخراج $\frac{1}{h_u h_v h_w}$ عاملا مشتركا نجد أن

$$\vec{\nabla}.\vec{F}=\frac{1}{h_u h_v h_w}\left(.\frac{\partial}{\partial u}h_v h_w F_u+.\frac{\partial}{\partial v}h_u h_v F_v+.\frac{\partial}{\partial w}h-u\,h_v F_w\right)$$

بالتعويض في الاحداثيات الديكارتية نجد أن :

$$\vec{\nabla}.\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

بالتعويض في الاحداثيات الاسطوانية نجد أن:

$$\vec{\nabla}.\vec{F}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF_r)}{\partial r}+\frac{\partial(F_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(rF_z)}{\partial z}\right)$$

بالتعويض في الاحداثيات الكروية نجد أن:

$$\vec{\nabla}.\vec{F}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial(r^2\sin\theta\,F_r)}{\partial r}+\frac{\partial(r\sin\theta\,F_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(rF_\varphi)}{\partial\varphi}\right)$$

الدوران : نعوض $\vec{\nabla}$ و $\vec{F}$ في قانون الدوران (الجداء الشعاعي لهما)

$$\vec{\nabla}\cap\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{u} & \hat{v} & \widehat{w}\\ \frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} & \frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} & \frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\\ F_u & F_v & F_w\end{vmatrix}$$

بإخراج $\frac{1}{h_u h_v h_w}$ عاملا مشتركا مع الانتباه أنه إذا ما أردنا إخراج عامل مشترك من محدد ما يجب إخراجه من جميع عناصر السطر أو العمود أي

$$\begin{vmatrix}6 & 4\\ 9 & 12\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}6 & 4\\ 3 & 4\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 12\end{vmatrix}$$

نجد أن
$$\vec{\nabla}\cap\vec{F}=\frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix}h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\widehat{w}\\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w}\\ h_uF_u & h_vF_v & h_wF_w\end{vmatrix}$$

بالتعويض في الاحداثيات الديكارتية نجد أن :

$$\vec{\nabla}\cap\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

بالتعويض في الاحداثيات الاسطوانية نجد أن :

$$\vec{\nabla}\cap\vec{F}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_r & F_\theta & F_z\end{vmatrix}$$

بالتعويض في الاحداثيات الكروية نجد أن :

$$\vec{\nabla}\cap\vec{F}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\,\hat{\varphi}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ F_r & F_\theta & r\sin\theta\,F_\varphi\end{vmatrix}$$

اللابلاسيان :

$$\vec{\nabla^2}U=\vec{\nabla}.\vec{\nabla}U$$

$$=\left(\frac{1}{h_u}.\frac{\partial}{\partial u}\hat{u}+\frac{1}{h_v}.\frac{\partial}{\partial v}\hat{v}+\frac{1}{h_w}.\frac{\partial}{\partial w}\hat{w}\right).\left(\frac{1}{h_u}.\frac{\partial U}{\partial u}\hat{u}+\frac{1}{h_v}.\frac{\partial U}{\partial v}\hat{v}+\frac{1}{h_w}.\frac{\partial U}{\partial w}\hat{w}\right)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}U=\left(\frac{1}{h_u}.\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{h_u}.\frac{\partial U}{\partial u}+\frac{1}{h_v}.\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{h_v}.\frac{\partial U}{\partial v}+\frac{1}{h_w}.\frac{\partial}{\partial w}\frac{1}{h_w}.\frac{\partial U}{\partial w}\right)$$

بإخراج $\frac{1}{h_uh_vh_w}$ عاملا مشتركا

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}U=\frac{1}{h_uh_vh_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_vh_w}{h_u}.\frac{\partial U}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_uh_w}{h_v}.\frac{\partial U}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_uh_v}{h_w}.\frac{\partial U}{\partial w}\right)\right)$$

بالتعويض في الاحداثيات الديكارتية نجد أن :

$$\vec{\nabla}^2U=\frac{\partial^2U}{\partial^2x}+\frac{\partial^2U}{\partial^2y}+\frac{\partial^2U}{\partial^2z}$$

بالتعويض في الاحداثيات الاسطوانية مع مراعاة أن

$$:h_{u=r}=1 \qquad h_{v=\theta}=r \qquad h_{w=z}=1$$

نجد أن

$$\vec{\nabla}^2 U=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right)$$

بالتعويض في الاحداثيات الكروية مع مراعاة أن

$$h_{u=r}=1 \qquad h_{v=\theta}=r \qquad h_{w=\varphi}=r\,sin\,\theta$$

نجد أن

$$\vec{\nabla}^2 U=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla^2} U&=\vec{\nabla}.\vec{\nabla}U\\&=\left(\frac{1}{h_u}.\frac{\partial}{\partial u}\hat{u}+\frac{1}{h_v}.\frac{\partial}{\partial v}\hat{v}+\frac{1}{h_w}.\frac{\partial}{\partial w}\widehat{w}\right).\left(\frac{1}{h_u}.\frac{\partial U}{\partial u}\hat{u}+\frac{1}{h_v}.\frac{\partial U}{\partial v}\hat{v}\right.\\&\left.+\frac{1}{h_w}.\frac{\partial U}{\partial w}\widehat{w}\right)\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}U=\left(\frac{1}{h_u}.\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{h_u}.\frac{\partial U}{\partial u}+\frac{1}{h_v}.\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{h_v}.\frac{\partial U}{\partial v}+\frac{1}{h_w}.\frac{\partial}{\partial w}\frac{1}{h_w}.\frac{\partial U}{\partial w}\right)$$

بإخراج $\frac{1}{h_u h_v h_w}$ عاملا مشتركا

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}U=\frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}.\frac{\partial U}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_u h_w}{h_v}.\frac{\partial U}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}.\frac{\partial U}{\partial w}\right)\right)$$

بالتعويض في الاحداثيات الديكارتية نجد أن :

$$\vec{\nabla}^2 U=\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 U}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2 U}{\partial^2 z}$$

بالتعويض في الاحداثيات الاسطوانية مع مراعاة أن

$$h_{u=r}=1 \qquad h_{v=\theta}=r \qquad h_{w=z}=1$$

نجد أن

$$\vec{\nabla}^2 U = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right)$$

بالتعويض في الاحداثيات الكروية مع مراعاة أن

$$h_{u=r} = 1 \qquad h_{v=\theta} = r \qquad h_{w=\varphi} = r\,sin\,\theta$$

نجد أن

$$\vec{\nabla}^2 U = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right)$$

ودمتم بخير ^_^

عطاء بلا حدود ☺

Viva RBCs